

الاقتارات المتشعبة Piecewise Functions

تعرف الاقتارات المتشعبة واقتارات القيمة المطلقة وتمثيلهما بيانياً، وتحديد مجال كل منهما ومداها.

فكرة الدرس



الاقتارات المتشعبة، اقتارات القيمة المطلقة، رأس الاقتارات.

المصطلحات



مسألة اليوم



التعرفة JD/m ³	شرائح الاستهلاك مقربة إلى أقرب m ³
0.361	0 – 18
0.450	19 – 36
0.550	37 – 54
1.000	55 – 72
1.200	أكثر من 72



يُبين الجدول المجاور تعرفه ثمن المياه للاستهلاك المنزلي في الدورة الواحدة لبعض شرائح الاستهلاك. كم تدفع أسرة استهلكت 42 m³ من الماء؟

الاقتارات المتشعبة

ألاحظ في المسألة السابقة، أنه لا يمكن كتابة معادلة واحدة بدلالة كمية المياه المستهلكة x يمكن من خلالها حساب ثمن المياه لأي قيم x ؛ لذا، نحتاج إلى معادلة خاصة بكل واحدة من شرائح الاستهلاك.

يُسمى الاقتارات المعرف بقواعد مختلفة عند أجزاء مختلفة في مجاله **اقتاراً متشعباً** (piecewise function).

أنتذكر

مجال أي اقتارات هو مجموعة القيم التي يأخذها المتغير x ، ومداها هو مجموعة القيم التي يأخذها المتغير y .

مثال 1

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & , -3 \leq x < 1 \\ x^2 & , x \geq 1 \end{cases} \quad \text{إذا كان}$$

1 أحدد مجال $f(x)$

ألاحظ أن الاقتارات معرف بقاعدتين؛ الأولى $f(x) = -2x + 1$ وتُستعمل لحساب قيم الاقتارات عندما تكون $-3 \leq x < 1$ ، والثانية $f(x) = x^2$ وتُستعمل لحساب قيم الاقتارات عندما تكون $x \geq 1$. إذن: مجال $f(x)$ هو الفترة $[-3, \infty)$

لغة الرياضيات

تُسمى النقطة التي تتغير عندها قاعدة الاقتارات المُشعب نقطة التشعب، فمثلاً: في الاقتارات $f(x)$ المجاور، يُسمى العدد 1 الإحداثي x لنقطة التشعب.

2 أجد قيمة $f(-2)$.

بما أن $1 < -2 < -3$ ؛ إذن: أستعمل القاعدة الأولى.

$$f(x) = -2x + 1$$

القاعدة الأولى

$$f(-2) = -2(-2) + 1$$

بتعويض $x = -2$

$$= 5$$

بالتبسيط

3 أجد قيمة $f(1)$.

بما أن $1 \geq 1$ ؛ إذن: أستعمل القاعدة الثانية.

$$f(x) = x^2$$

القاعدة الثانية

$$f(1) = (1)^2$$

بتعويض $x = 1$

$$= 1$$

بالتبسيط

4 أمثل الاقتران $f(x)$ بيانياً، وأحدد مداه.

الخطوة 1: أمثل $f(x) = -2x + 1$ عندما $-3 \leq x < 1$

أجد قيمة الاقتران $f(x) = -2x + 1$ عندما $x = 1$ ، وعندما $x = -3$ كما في الجدول الآتي:

x	-3	1
$y = f(x) = -2x + 1$	7	-1
(x, y)	$(-3, 7)$	$(1, -1)$

أتذكر

بما أن $f(x) = -2x + 1$ اقتران خطي؛ لذا، تكفي نقطتان لتمثيله بيانياً.

أتذكر

يُمثل الاقتران

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

قطعاً مكافئاً مفتوحاً

إلى الأعلى إذا كانت

قيمة $a > 0$ ، ومفتوحاً

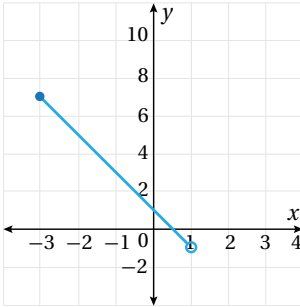
إلى الأسفل إذا كانت

قيمة $a < 0$ ، ومعادلة

محور تماثله هي

$$x = -\frac{b}{2a}$$

هما: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.



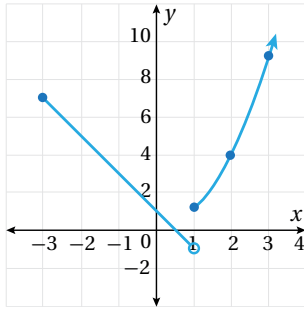
أعَيّن النقطتين $(-3, 7)$ ، $(1, -1)$ في المستوى الإحداثي وأصل بينهما، وبما أن العدد (-3) يُحقّق المتباينة $-3 \leq x < 1$ ؛ أبدأ التمثيل بدائرة مظلّلة عند النقطة $(-3, 7)$ ، أمّا العدد (1) فهو لا يُحقّق المتباينة؛ لذا، أنهي التمثيل بدائرة غير مظلّلة عند النقطة $(1, -1)$.

الخطوة 2: أمثل $f(x) = x^2$ عندما $x \geq 1$

منحنى الاقتران $f(x) = x^2$ عندما $x \geq 1$ هو جزء من منحنى قطع مكافئ مفتوح إلى الأعلى،

أنشئ جدول قيم؛ لأرسم الجزء من منحنى القطع المكافئ، الذي يقع يمين العدد 1

x	1	2	3
$y = f(x) = x^2$	1	4	9
(x, y)	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$



أُعيّن النقاط $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$ في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بخط منحني، وبما أن العدد 1 يُحقّق المتباينة $x \geq 1$ ، إذن: أبدأ التمثيل بدائرة مظلّلة عند $(1, 1)$. بالنظر إلى التمثيل البياني؛ ألاحظ أن مدى هذا الاقتران هو $y > -1$ ويمكن التعبير عنه بالفترة $(-1, \infty)$.

أتحقّق من فهمي

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & , x < 2 \\ 5 & , x = 2 \\ 2x - 1 & , x > 2 \end{cases}$$

إذا كان

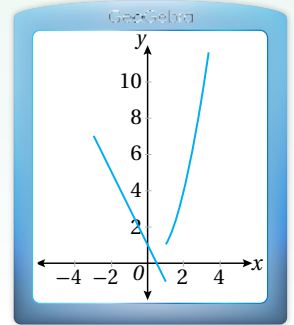
(a) أ حدّد مجال $f(x)$ (b) أجد قيمة كلّ من $f(5)$ و $f(2)$

(c) أمثّل الاقتران $f(x)$ بيانيًا، وأحدّد مداه.

الدعم البياني

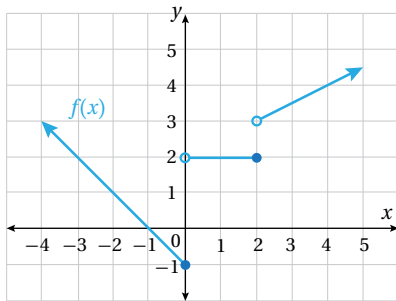
يمكن استعمال برمجية جيو جبرا لتمثيل الاقتران $f(x)$ بيانيًا، عن طريق المعادلة الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & , -3 \leq x < 1 \\ -2x + 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$



يُمكنني أيضًا أن أجد قاعدة الاقتران المتشعب؛ إذا أُعطيت تمثيله البياني، كما يتّضح من المثال الآتي.

مثال 2



أكتب قاعدة الاقتران المتشعب $f(x)$ الممثّل بيانيًا في الشكل المجاور.

أكتب الاقتران الذي يمثّل كلّ جزء في التمثيل البياني.

الخطوة 1: أكتب القاعدة التي يمثّلها الجزء الأيسر في التمثيل البياني.

الجزء الأيسر في التمثيل البياني هو اقتران خطي مقطعه مع المحور y هو -1 وميله -1 وباستعمال صيغة الميل والمقطع فإن قاعدة هذا الجزء هي: $f(x) = -x - 1$ ، ووجود دائرة مظلّلة عند النقطة $(0, -1)$ ، يعني أن هذه القاعدة تقابل الفترة $(-\infty, 0]$ من مجال $f(x)$.

أتذكّر

ميل المستقيم المار بالنقطتين

(x_1, y_1) ، (x_2, y_2) هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ومعادلته بصيغة الميل

والمقطع هي:

$y = mx + b$ ، حيث

m ميل المستقيم، و b

المقطع y ، ومعادلته

بصيغة الميل ونقطة هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

الخطوة 2: أكتب القاعدة التي يُمثلها الجزء الأوسط في التمثيل البياني.

الجزء الأوسط في التمثيل البياني هو الاقتران الثابت $f(x) = 2$ ، ووجود دائرة مظللة عند $(2, 2)$ ، ودائرة غير مظللة عند $(0, 2)$ ، يعني أن هذه القاعدة تقابل الفترة $[0, 2]$ من مجال $f(x)$.

الخطوة 3: أكتب القاعدة التي يُمثلها الجزء الأيمن في التمثيل البياني.

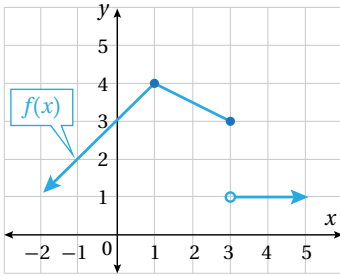
الجزء الأيمن في التمثيل البياني اقتران خطي ميله 0.5 وباستعمال صيغة الميل ونقطة، فإن قاعدة هذا الجزء هي: $f(x) - 4 = 0.5(x - 4)$ ، ويمكن إعادة كتابتها على الصورة: $f(x) = 0.5x + 2$ ، ووجود دائرة غير مظللة عند $(2, 3)$ ، يعني أن هذه القاعدة تقابل الفترة $(2, \infty)$ من مجال الاقتران $f(x)$.

إذن: تكون قاعدة هذا الاقتران المتشعب على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & , x \leq 0 \\ 2 & , 0 < x \leq 2 \\ 0.5x + 2 & , x > 2 \end{cases}$$

أتعلم

بما أن المقطع y للجزء الأيمن من الاقتران لا يظهر في التمثيل البياني مثل الجزء الأيسر، أبدأ بكتابة قاعدة هذا الجزء من التمثيل بصيغة الميل ونقطة أولاً، ثم أعيد كتابته بصورة الميل والمقطع.



أتحقق من فهمي

أكتب قاعدة الاقتران $f(x)$ الممثل بيانياً في الشكل المجاور.

يُمكن نمذجة كثير من المواقف الحياتية باستعمال الاقترانات المتشعبة.

مثال 3: من الحياة



عمل: أجره ساعة العمل الواحدة في إحدى الشركات 4 دنانير خلال

أوقات العمل النظامية المعتادة ضمن 40 ساعة عمل في الأسبوع.

وتدفع الشركة لكل ساعة عمل إضافي فوق ذلك أجره ساعة ونصف من

ساعات العمل المعتاد. أكتب اقتراناً لحساب الأجره الأسبوعية لعامل اشتغل x ساعة في أسبوع.

يوجد في المسألة قاعدتان لحساب الأجره؛ تبعاً لعدد ساعات العمل.

عدد الساعات	الأجره
$0 \leq x \leq 40$	$4x$
$x > 40$	$4(40) + 6(x - 40)$

أتعلم

أجره ساعة العمل الإضافي تساوي أجره ساعة ونصف من العمل النظامي.

$$4 \times 1.5 = 6$$

إذن: اقتران الأجرة هو:

$$f(x) = \begin{cases} 4x & , 0 \leq x \leq 40 \\ 6x-80 & , x > 40 \end{cases}$$

أتحقق من فهمي

زادت شركة رواتب موظفيها الشهرية وفق الأسس الآتية: الرواتب التي تقل عن 400 دينار زادت بنسبة 15%، والرواتب من 400 دينار إلى أقل من 600 دينار زادت بنسبة 10%، مع علاوة ثابتة بقيمة 20 دينارًا، والرواتب من 600 دينار وأكثر زادت 80 دينارًا. أكتبُ اقترانًا متشعبًا لحساب الراتب الجديد لموظفي الشركة.

أذكر

القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي x والتي يُرمز إليها بالرمز $|x|$ تساوي بعده عن الصفر على خط الأعداد، وبما أن البعد لا يكون سالبًا، فإنه توجد حالتان:

$$|x| = x, x \geq 0$$

$$|x| = -x, x < 0$$

مثال عددي:

$$\left| -\frac{1}{2} \right| = \left| +\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

اقتران القيمة المطلقة

اقتران القيمة المطلقة (absolute value function) هو اقتران يحتوي على قيمة مطلقة لمقدار جبري، ومن أمثله:

$$f(x) = 2|x| + 3, \quad f(x) = |x^2 - 2x - 3|, \quad f(x) = \left| \frac{x+2}{2x-6} \right|$$

ومن أبسط اقترانات القيمة المطلقة الاقتران $f(x) = |x|$ ، ويُمكن كتابته بصورة اقتران متشعب كما يأتي:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

تُسمى إعادة كتابة أي اقتران قيمة مطلقة على صورة اقتران متشعب، من دون استعمال رمز القيمة المطلقة، إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة.

مثال 4

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x) = |2x + 4|$

الخطوة 1: أساوي ما في داخل رمز القيمة المطلقة بالصفر، ثم أحلّ المعادلة الناتجة:

$$2x + 4 = 0$$

بمساواة ما في داخل رمز القيمة المطلقة بالصفر

$$2x + 4 - 4 = 0 - 4$$

ب طرح 4 من طرفي المعادلة

$$\frac{2x}{2} = \frac{-4}{2}$$

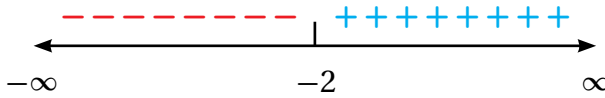
بقسمة طرفي المعادلة على 2

$$x = -2$$

بالتبسيط

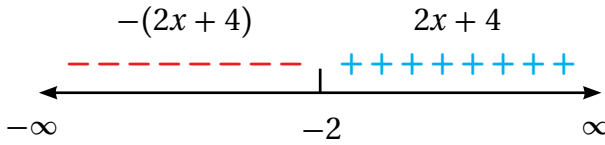
الخطوة 2: أُعَيِّن صفر المعادلة على خط الأعداد، ثم أُحدِّد الإشارة على جانبيه.

أُعَيِّن صفر المعادلة (-2) على خط الأعداد، ثم أُحدِّد الإشارة على جانبيه، وذلك بتعويض أي قيمة أقل من -2 في $2x + 4$ لأجد أن ناتج التعويض سالب دائماً، ما يعني أن الإشارة يسار -2 سالبة. وأعوّض أي قيمة أكبر من -2 في $2x + 4$ لأجد أن ناتج التعويض موجب دائماً، ما يعني أن الإشارة يمين -2 موجبة.



الخطوة 3: أكتب قاعدة الاقتران حسب إشارة يمين صفر المعادلة ويساره.

أكتب ما في داخل رمز القيمة المطلقة كما هو دون تغيير في الجزء الموجب، وأكتب في الجزء السالب ما في داخل رمز القيمة المطلقة مضروباً في -1



الخطوة 4: أكتب قاعدة الاقتران المتشعب.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & , x < -2 \\ 2x + 4 & , x \geq -2 \end{cases}$$

أتحقق من فهمي

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x) = |3x - 9|$

أتعلم

يأخذ الاقتران الخطي
يمين صفه إشارة معامل
 x نفسها، ويسار صفه
عكس إشارة معامل x .

أتعلم

يمكن تغيير مكان المساواة
في قاعدة الاقتران $f(x)$
وكتابتها على الصورة الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & , x \leq -2 \\ 2x + 4 & , x > -2 \end{cases}$$

تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانياً

يتكوّن التمثيل البياني لاقتران القيمة المطلقة الذي على الصورة $f(x) = a|x-h| + k$ ، حيث $a \neq 0$ ، من شعاعين على شكل حرف V متمائلين حول المحور $x = h$ ، ورأس الاقتران (function vertex) هو النقطة التي يصل عندها إلى أعلى قيمة أو أقل قيمة وإحداثياتها (h, k) .

يمكن تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانياً باستعمال محور التماثل والرأس.

مثال 5

أمثل بيانيًا كل اقتران مما يأتي، وأحدّد مجاله ومداه:

1 $f(x) = |x|$

الخطوة 1: أجد إحداثيي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

$$(h, k)$$

إحداثيًا نقطة الرأس

$$= (0, 0)$$

بتعويض $h = 0, k = 0$

إذن، إحداثيا نقطة الرأس $(0, 0)$ ، ومعادلة محور التماثل $x = 0$ (المحور y).

الخطوة 2: أجد قيمتين للمتغير x حول محور التماثل، ثم أجد صورتيهما.

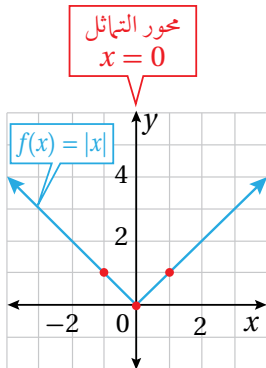
بما أنّ محور التماثل $x = 0$ ، أختار قيمة للمتغير x أكبر من 0 (مثلاً 1) وقيمة أخرى أقل من 0 (مثلاً -1)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران.

x	-1	1
$f(x) = x $	1	1
(x, y)	$(-1, 1)$	$(1, 1)$

الخطوة 3: أمثل النقطتين والرأس بيانيًا.

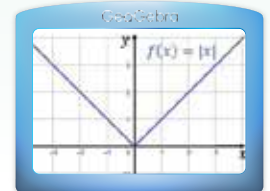
أمثل النقطتين والرأس في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط الثلاث بشكل V .

يُلاحظ من التمثيل البياني أنّ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأن المدى $[0, \infty)$.



الدعم البياني

يُمكن استعمال برمجية جيو جبرا لتمثيل الاقتران $f(x) = |x|$ ، وذلك بكتابة $f(x) =$ في شريط الإدخال، ثم نقر $|x|$ في لوحة المفاتيح، وكتابة x بين خطي القيمة المطلقة، ثم الضغط على زر الإدخال (ENTER)، فيظهر التمثيل البياني كما يأتي:



2 $f(x) = -|x + 2| + 3$

الخطوة 1: أجد إحداثي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

(h, k) إحداثيًا نقطة الرأس

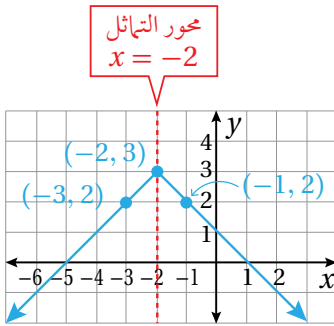
$= (-2, 3)$ بتعويض $h = -2, k = 3$

إذن، إحداثيا نقطة الرأس $(-2, 3)$ ، ومعادلة محور التماثل $x = -2$.

الخطوة 2: أحدد قيمتين للمتغير x حول محور التماثل، ثم أجد صورتيهما.

بما أن محور التماثل $x = -2$ ، أختار قيمة للمتغير x أكبر من -2 (مثلاً -1) وقيمة أخرى أقل من -2 (مثلاً -3)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران.

x	-3	-1
$f(x) = - x + 2 + 3$	2	2
(x, y)	$(-3, 2)$	$(-1, 2)$



الخطوة 3: أمثل النقطتين والرأس بيانيًا.

أمثل النقطتين والرأس في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط الثلاث بشكل V مقلوب.

ألاحظ من التمثيل البياني أن المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأن المدى $(-\infty, 3]$.

أتحقق من فهمي

أمثل بيانيًا كل اقتران مما يأتي، وأحدد مجاله ومداه:

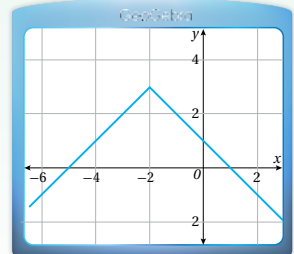
a) $f(x) = 2|x|$ b) $f(x) = -2|x - 4| + 3$ c) $f(x) = |x - 3| - 2$

أتعلم

يكون اقتران القيمة المطلقة على الصورة $f(x) = a|x - h| + k$ ، حيث $a \neq 0$ مفتوحًا إلى الأعلى إذا كانت $a > 0$ ، ومفتوحًا إلى الأسفل إذا كانت $a < 0$.

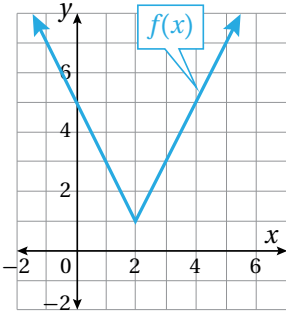
الدعم البياني

يمكن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران $f(x) = -|x + 2| + 3$ وذلك بكتابة قاعدة الاقتران في شريط الإدخال، ثم الضغط على زر الإدخال (ENTER)، فيظهر التمثيل البياني كما يأتي:



يُمكن إيجاد قاعدة اقتران القيمة المطلقة لمقدار خطي؛ إذا أُعطي تمثيله البياني.

مثال 6



أكتب قاعدة اقتران القيمة المطلقة $f(x)$ الممثل بيانيًا في الشكل المجاور.

يظهر من الشكل أن إحداثي رأس اقتران القيمة المطلقة $(2, 1)$ ، وهذا يعني أنه يمكن كتابة قاعدة الاقتران بالصورة الآتية:

$$f(x) = a|x - 2| + 1$$

ولإيجاد قيمة a ، أعوض في قاعدة الاقتران إحداثي أي نقطة تقع على منحى الاقتران (مثلاً: $(0, 5)$)، وأحل المعادلة الناتجة.

$$f(x) = a|x - 2| + 1$$

قاعدة الاقتران

$$5 = a|0 - 2| + 1$$

بتعويض $(0, 5)$

$$5 = 2a + 1$$

بالتبسيط

$$4 = 2a$$

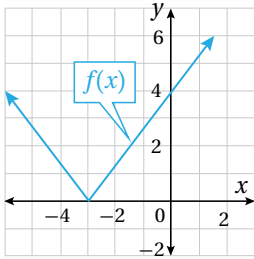
ب طرح 1 من طرفي المعادلة

$$a = 2$$

بالقسمة طرفي المعادلة على 2

إذن: قاعدة الاقتران هي: $f(x) = 2|x - 2| + 1$

أتحقق من فهمي



أكتب قاعدة اقتران القيمة المطلقة $f(x)$ الممثل بيانيًا في الشكل المجاور.

أَتَدَرَّب وَأَحْلُ الْمَسَائِل



$$\text{إذا كان } f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x < -1 \\ 4x - 3 & , -1 \leq x \leq 4 \\ 2 & , x > 4 \end{cases} \text{ ، فأجد كلاً من:}$$

1 $f(-2)$

2 $f(-1)$

3 $f(0)$

4 $f(4)$

5 $f(8)$

6 $f(5)$

أُعيد تعريف كل من الاقترانين الآتيين:

7 $f(x) = |3x - 6|$

8 $f(x) = |7x - 5| + 3$

أمثل كلاً من الاقترانات الآتية بيانياً، وأحدّد مجالها ومداها:

9 $f(x) = \begin{cases} 3-2x & , x < -1 \\ 6 & , -1 \leq x \leq 3 \\ x^2 & , x > 3 \end{cases}$

10 $f(x) = \begin{cases} 3 & , x = 1 \\ -x + 2 & , x \neq 1 \end{cases}$

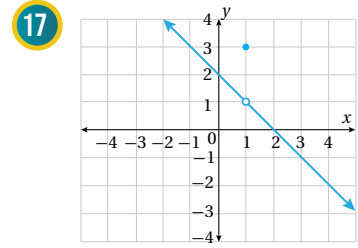
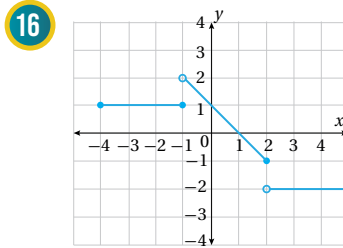
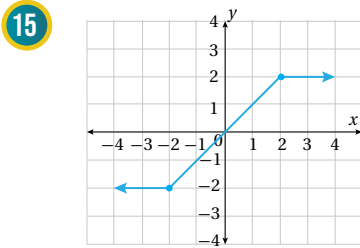
11 $f(x) = \begin{cases} x+5 & , x \neq 2 \\ 6 & , x = 2 \end{cases}$

12 $f(x) = \begin{cases} 2 & , x \leq 3 \\ -2 & , x > 3 \end{cases}$

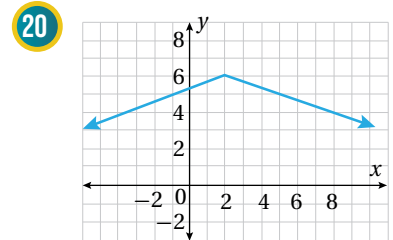
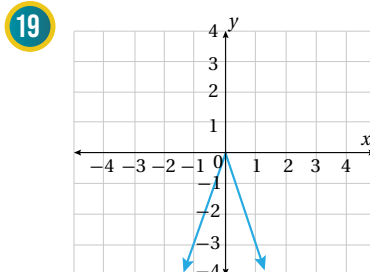
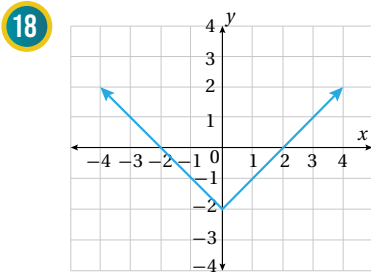
13 $f(x) = 2|x + 3|$

14 $f(x) = -|x - 4| + 1$

أكتب قاعدة الاقتران المتشعب الممثل بيانياً في كل من الأشكال الآتية:



أكتب قاعدة اقتران القيمة المطلقة الممثل بيانياً في كل من الأشكال الآتية:





خيمة: يُمثّل منحنى الاقتران $f(x) = -1.4|x - 2.5| + 3.5$ حافتي الوجه الأمامي لخيمة، ويُمثّل العمود الذي يتوسّط الوجه الأمامي للخيمة محور التماثل، أمّا المحور x فيُمثّله سطح الأرض.

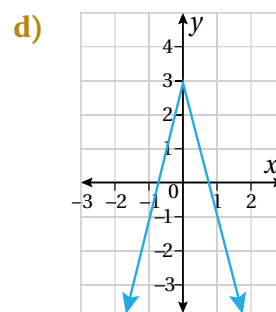
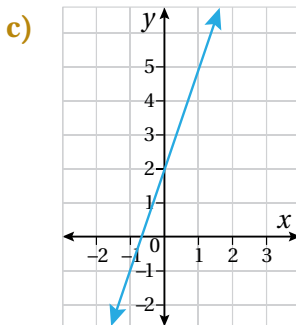
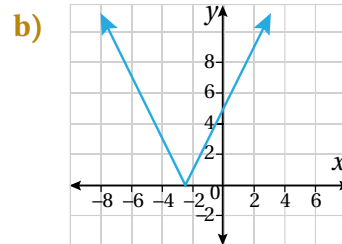
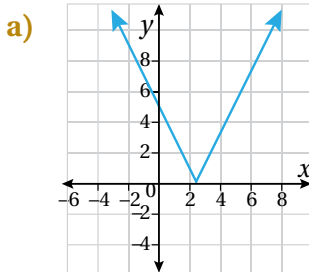
21 أمثّل الاقتران بيانيًا.

22 أجد مجال الاقتران ومداه.

23 أعود إلى مسألة اليوم، وأكتبُ الاقتران المتشعّب الذي يُمكنني استعماله لحساب ثمن المياه لأيّ كمّية مستهلكة.

مهارات التفكير العليا

24 **تبرير:** أيّ الآتية تُمثّل منحنى الاقتران $f(x) = |2x - 5|$ ؟ أبرّر إجابتي:



25 **تحّد:** أمثّل الاقتران: $g(x) = -|4 - 2x| - 3$ بيانيًا.